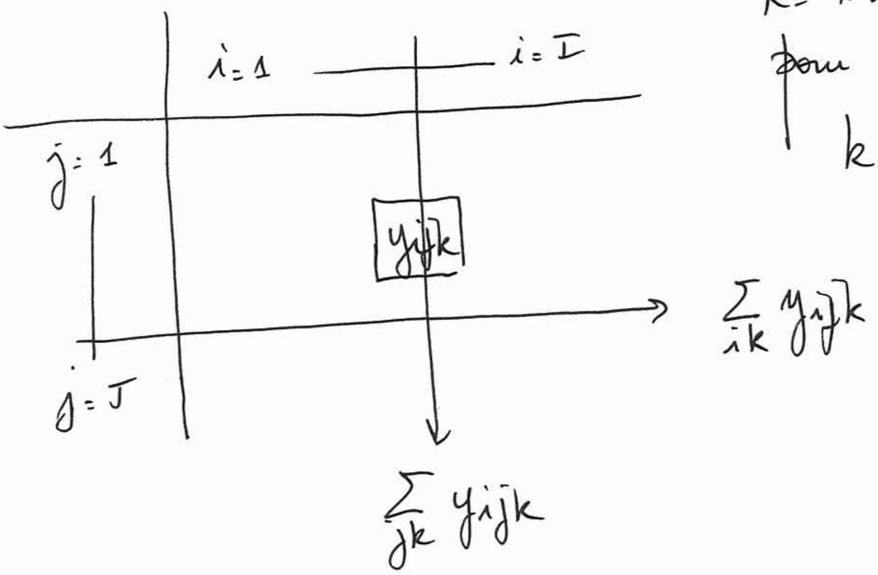
Analyse du Modèle Mixte à 2 facteurs.

- c'est le modèle le plus utilisé en pratique (avec 2 ou plus d'effets).
- Considérer 2 effets permet déjà d'illustrer les difficultés absentes ds le cas 1 facteur.
- En général on représente les données sous la forme d'un tableau



$k =$ indice de répétition pour le croisement ij

$k = 1, n_{ij}$

$$\mathbb{E}(Y_{ijk}) = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}$$

↳ la question première : fixes, aléatoires, mixtes ?

- si α fixe et β aléatoire, quel est le statut de γ ?
- les effets sont-ils croisés ou hiérarchisés ?

2 Facteurs Aléatoires Croisés.

$$Y_{ijk} = \mu + A_i + B_j + AB_{ij} + \varepsilon_{ij} \longleftarrow N(0, \sigma^2_\varepsilon).$$

$A_i \to N(0,\sigma^2_A)$ $\quad B_j \to N(0,\sigma^2_B)$ $\quad AB_{ij} \to N(0,\sigma^2_{AB})$

$n_{ij}, \; n_{i+}, \; n_{+j}$

. Ecriture matricielle : $\quad Y = \mathbb{1}_n \mu + ZU + E$

$$U' = [A_1 — A_I \;\; B_1 — B_J \;\; AB_{11} — AB_{IJ}].$$

$$Z = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{n_{1+}} & & \mathbb{1}_{n_{+1}} & & \mathbb{1}_{n_{11}} & & & \\ & \mathbb{1}_{n_{2+}} & & \mathbb{1}_{n_{+2}} & & \mathbb{1}_{n_{12}} & & \\ & & \mathbb{1} & \mathbb{1} & & & \mathbb{1}_{n_{ij}} & \mathbb{1} \end{bmatrix}$$

. Composantes de la Variance.

$$\begin{cases} \mathbb{V}(Y_{ijk}) = \sigma^2_A + \sigma^2_B + \sigma^2_{AB} + \sigma^2_\varepsilon . \\ \mathrm{cov}(Y_{ijk}, Y_{ijk'}) = \sigma^2_A + \sigma^2_B + \sigma^2_{AB} & (\text{même } q) \\ \mathrm{cov}(Y_{ijk}, Y_{ij'k'}) = \sigma^2_A & (\text{même } i) \\ \mathrm{cov}(Y_{ijk}, Y_{i'jk'}) = \sigma^2_B & (\text{même } j) \end{cases}$$

$$\mathbb{V}(Y) = Z\,\mathbb{V}(U)Z' + R = Z \begin{bmatrix} \sigma^2_A Id_I & & \\ & \sigma^2_B Id_J & \\ & & \sigma^2_{AB} I_{IJ} \end{bmatrix} Z' + \sigma^2 I.$$

souvent on note $G = \mathbb{V}(U)$.

$$V(Y) = \left[\begin{array}{c|c} i\,i & i\,i' \\ \hline i'\,i & i'\,i' \end{array}\right]$$

Bloc ii : $\begin{bmatrix} \sigma_e^2 I_{n_0} + (\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_{AB}^2) J_{n_0} & \sigma_A^2 J_{n_0} \\ \sigma_A^2 J_{n_0} & \sigma_e^2 I_{n_0} + (\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_{AB}^2) J_{n_0} \end{bmatrix}$

Bloc ii' = $\begin{bmatrix} \sigma_B^2 J_{n_0} & 0 \\ 0 & \sigma_B^2 J_{n_0} \end{bmatrix}$.

- Ecriture Tensorielle :

μ : $\mathbb{1}_I \otimes \mathbb{1}_J \otimes \mathbb{1}_{n_0}$: X

A : $Id_I \otimes \mathbb{1}_J \otimes \mathbb{1}_{n_0}$: Z_A

B : $\mathbb{1}_I \otimes Id_J \otimes \mathbb{1}_{n_0}$: Z_B.

AB : $Id_I \otimes Id_J \otimes \mathbb{1}_{n_0} = Z_{AB}$

ε : $Id_I \otimes Id_J \otimes Id_{n_0}$.

- Composants de la Variance : $Z_A \left(\sigma_A^2 Id_I\right) Z_A'$

↳ due @A.

$(A \otimes B)(X \otimes Y) = (AX \otimes BY)$

↳ $\begin{cases} V_A = \sigma_A^2 \left(Id_I \otimes J_J \otimes J_{n_0}\right) \\ V_B = \sigma_B^2 \left(J_I \otimes Id_J \otimes J_{n_0}\right) \\ V_{AB} = \sigma_{AB}^2 \left(Id_I \otimes Id_J \otimes J_{n_0}\right). \end{cases}$

Interaction ou facteur emboîté :

$$\begin{cases} (1) & \mu + A_i + B_j + AB_{ij} \\ (2) & \mu + A_i + B_{j(i)} \end{cases}$$

(1) : les 2 niveaux ij sont nécessaires pour définir AB_{ij} : cellule d'effectif n_{ij}.

(2) : l'effet du 2^e facteur n'a de sens qu'une fois le 1er facteur déterminé.

$B_{1(i=1)}$ et $B_{1(i=2)}$ n'ont rien à voir.

↳ n'ont pas de "niveau 1" de B en commun.

→ Pas d'effet principal de B dans ce cas là.

Dans l'écriture matricielle :

$$\begin{cases} \mu : & \mathbb{1}_I \otimes \mathbb{1}_J \otimes \mathbb{1}_{n_0} \\ A : & Id_I \otimes \mathbb{1}_J \otimes \mathbb{1}_{n_0} . \\ B_{(j(i))} : & Id_I \otimes Id_J \otimes \mathbb{1}_{n_0} . \end{cases}$$

↳ A la m̂ structure que le terme en γ ds le modèle à facteurs croisé.

Sommes de carrés associées au modèle.

Notations $\begin{cases} y_{i\cdot\cdot},\ y_{\cdot j\cdot},\ y_{ij\cdot},\ y_{\cdot\cdot\cdot} \\ n_{i+},\ n_{+j},\ n_{ij},\ n_{++}. \end{cases}$

$$SSA = \sum_{ijk} (y_{i\cdot\cdot} - y_{\cdot\cdot\cdot})^2 = n_0 J \sum_i (y_{i\cdot\cdot} - y_{\cdot\cdot\cdot})^2$$

↳ On procède comme pour 1 facteur.

$$\begin{array}{rcl} y_{i\cdot\cdot} & = & \mu + A_i + B_\cdot + AB_{i\cdot} + E_{i\cdot\cdot} \\ y_{\cdot\cdot\cdot} & = & \mu + A_\cdot + B_\cdot + AB_{\cdot\cdot} + E_{\cdot\cdot\cdot} \\ \hline (y_{i\cdot\cdot} - y_{\cdot\cdot\cdot})^2 & = & \left[(A_i - A_\cdot) + (AB_{i\cdot} - AB_{\cdot\cdot}) + (E_{i\cdot\cdot} - E_{\cdot\cdot\cdot})\right]^2 \end{array}$$

$$(I-1)\left[J n_0 \sigma^2_A \qquad n_0 \sigma^2_{AB} \qquad \sigma^2_e \right].$$

↳ Rappel : $A \perp B \perp AB \perp E$.

$$\begin{cases} \mathbb{E}(MSA) = J n_0 \sigma^2_A + n_0 \sigma^2_{AB} + \sigma^2_e \\ \mathbb{E}(MSB) = I n_0 \sigma^2_B + n_0 \sigma^2_{AB} + \sigma^2_e \\ \mathbb{E}(MSAB) = n_0 \sigma^2_{AB} + \sigma^2_e \\ \mathbb{E}(MSE) = \sigma^2_e . \end{cases}$$

↳ On peut Construire des estimateurs ANOVA (cas equilibré).

$$\begin{cases} \widehat{\sigma_A^2} = \dfrac{MSA - MSAB}{J n_0} \\[2ex] \widehat{\sigma}_B^2 = \dfrac{MSB - MSAB}{I n_0} \\[2ex] \widehat{\sigma_{AB}^2} = \dfrac{MSAB - MSE}{n_0}. \\[2ex] \widehat{\sigma_e^2} = MSE \end{cases}$$

→ Sous l'hypothèse de Normalité,

→ On peut Construire les tests pour les effets . A, B, AB.

$$MSA = \frac{SSA}{I-1}. \quad / \quad \mathbb{E}(MSA) = J n_0 \sigma_A^2 + n_0 \sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$$

$$\hookrightarrow \frac{SSA}{J n_0 \sigma_A^2 + n_0 \sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2} \sim \chi^2(I-1).$$

$$\hookrightarrow \frac{SSB}{I n_0 \sigma_B^2 + n_0 \sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2} \sim \chi^2(J-1)$$

$$\hookrightarrow \frac{SSAB}{n_0 \sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2} \sim \chi^2(I-1)(J-1).$$

. Si on veut tester $\mathcal{H}_0 \{\sigma^2_{AB} = 0\}$: l'interact n'a pas d'effet.

Sous $\mathcal{H}_0$: $$\frac{SS_{AB}}{n_0 \sigma^2_{AB} + \sigma^2_e} = \frac{SS_{AB}}{\sigma^2_e} \sim \chi^2 (I-1)(J-1)$$

↳ $$\frac{SS_{AB} / (I-1)(J-1)}{[SS_e / IJ(n_0 - 1)} \sim F$$

estime σ^2_e.

$$\frac{MS_{AB}}{MS_E} \underset{\mathcal{H}_0}{\sim} F_{(I-1)(J-1),\ IJ(n_0-1)}$$

. Si on veut tester l'effet Principal $\{\sigma^2_A = 0\}$.

$$\frac{SS_A}{J n_0 \sigma^2_A + n_0 \sigma^2_{AB} + \sigma^2_e} = \frac{SS_A}{n_0 \sigma^2_{AB} + \sigma^2_e}.$$

$$\frac{SS_{AB}}{n_0 \sigma_{AB} + \sigma^2_e} \quad / \quad \frac{SS_e}{\sigma^2_e}.$$

2 possibilités

$$\frac{SS_A / (I-1)}{SS_{AB} / (I-1)(J-1)} \sim \mathcal{F}_{I-1,\,(I-1)(J-1)}.$$

↳ Stratégie Effet aléatoire

$$\frac{SS_A / (I-1)}{SS_e / (IJ)(n_0 - 1)} \sim \mathcal{F}_{(I-1),\ IJ(n_0-1)}$$

↳ Stratégie effet fixe.

↳ Quand on teste $\sigma_A^2 = 0$.

la somme de carré associée est $\dfrac{SS_A}{n_0\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2}$

⇒ Il faut trouver un estimateur de $n_0\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$

↳ Cet estimateur c'est SS_{AB}.

→ Dans le modèle mixte, on utilise $\dfrac{MS_A}{MS_{AB}}$

↳ change les ddl.

↳ augmente le dénominateur (par rapport @ MSE).

↳ "baisse l'effet" si σ_{AB}^2 est fort.
atténue.

↳ Idem avec $\dfrac{SS_B}{n_0\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2}$

Table de l'ANOVA.

A	$I-1$	SS_A	MS_A	MS_A / MS_{AB}
B	$J-1$	SS_B	MS_B	MS_B / MS_{AB}
AB	$(I-1)(J-1)$	SS_{AB}	MS_{AB}	MS_{AB} / MS_E
Resid.	$(n_0-1)IJ$	SS_E	MS_E	

↳ Application au design en split plot (TD/TP).

Expériences en Split Plot. (Parcelles divisées).

↳ C'est un plan d'exp. inventé par Fisher.

↳ Les expériences sont organisées en "bloc" en fonction des contraintes de planification:

↳ Si on considère 2 facteurs, certains facteurs peuvent être plus contraignant à mettre en place.

→ Ex: . Agronomie:
- . 2 méthodes d'irrigat°
- . 2 fertilisants.
- . Champ d'expérimentat°.
- .

. block = Champ.
. répartit° des fertiliseurs / champ
. répartit° des irrigat° / bloc / fertil.

. Industrie: étude de la corrosion de barres d'acier en fonction de 4 revêtemt et 3 Temp. du four.

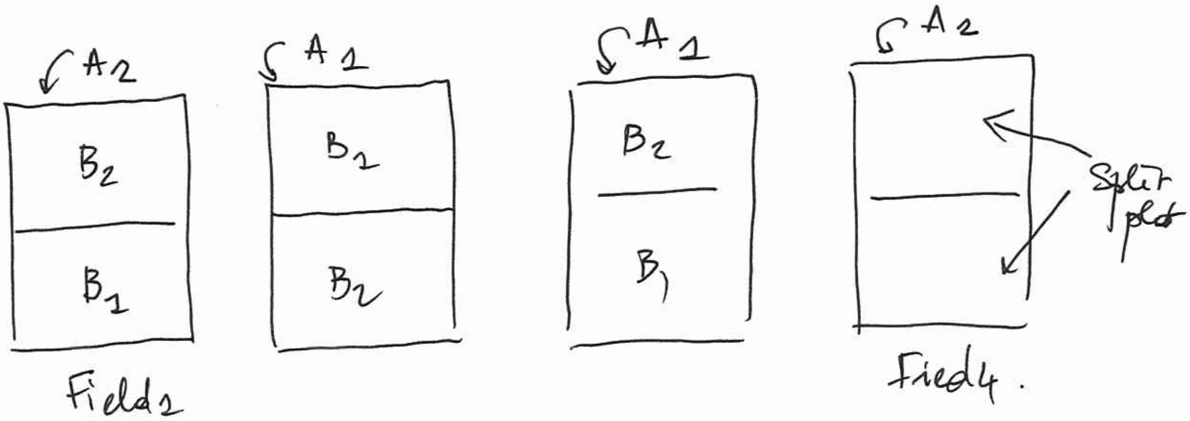
→ la temp. étant difficile à changer. On va organiser l'exp. en fonction du four: block = temp.

↳ On a une hiérarchie ds l'organisation des traitements.
- Répartition des traitt du 1er facteur ds les blocks
- within block = subplot: splitplot.
- . ↳ ensuite répartition du 2e facteurs

Block / Whole Plot / Subplot.

- une exp. en split plot est organisée par block, et chq bloc est utilisé à unité expérimentale pour un sous ensemble de facteurs.

- Il y a 2 niveaux de Précision / Unités expérimentales



- 1 randomizat° pour déterminer l'assig° du 1er Facteur aux blocs (whole plot) $\sim N(0, \sigma_w^2)$ pour l'erreur
- 1 ______ ______ 2e ___ au splitplot.
$\sim N(0, \sigma^2)$.

- hypothèse en terme de force des effets:
  ↳ en général on fait le blocking sur la variable qui a le moins d'effet sur le trait°.

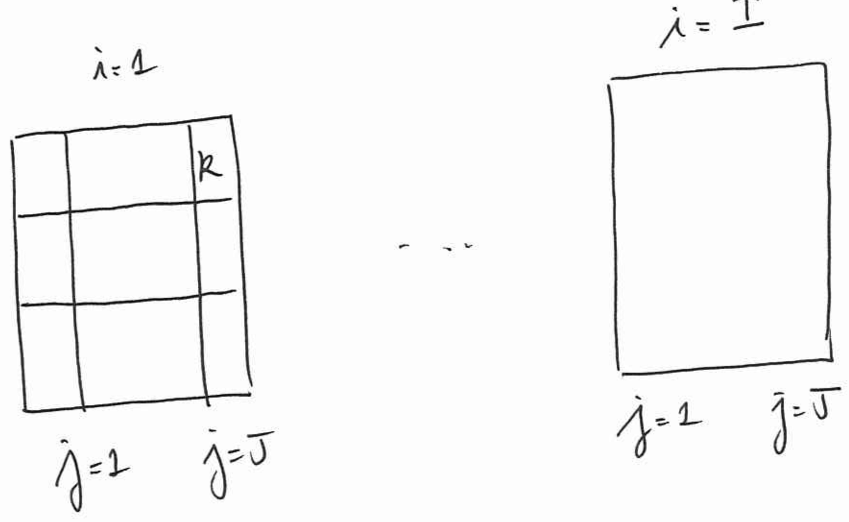
<u>hypothèse</u> : effet traitement >> effet bloc.

↳ On a une meilleure précision sur l'effet du facteur testé ds les subplots.

Recommandations : - suffisam^t de nb de blocs.

- Sinon on peut construire des plans en Blocks InComplets Equilibrés.
- pas d'interact° bloc * trait^t.
- si on sait qu'un facteur a un plus petit effet qu'un autre, on peut le mettre sur les subplots pour avoir + de puissance. (surtt si on veut comparer ses effets).

. Modèle d'analyse de split plot.



1)- Whole plot / Blocks model.

Attribut° des niveaux du 1er facteur aux blocs :

$$\mu + \alpha_i + \beta_j + F_{ij}$$

$$F_{ij} \sim N(0, \sigma_w^2).$$

σ_W^2 = erreur liée à la répartition des main plots aux blocs.

2). Split plot model :

$$\gamma_k + (\beta\gamma)_{jk} + \varepsilon_{ijk}$$

effet principal du subplot

interact° main/sub.

$N(0,\sigma^2)$. Residuelle

Modèle :

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + F_{ij} + \gamma_k + (\beta\gamma)_{jk} + \varepsilon_{ijk}.$$

$$N(0,\sigma_W^2) \quad \perp\!\!\!\perp. \quad N(0,\sigma^2)$$

→ On fait l'Analyse en 2 Fps.

→ On peut choisir de mettre des effets Fixes ou Aléatoires en fonct° du Contexte (pour α, β, γ)

Table d'ANOVA pour un Split plot.

Whole plot analysis.

		dF	SS	MS	F
α / A_i	Block	$I-1$	SS_A		
β / B_j	Main plot	$J-1$	SS_B		MSA/MSE_F
F_{ij}	Main Plot Error	$(I-1)(J-1)$	SS_F	MSE_F	

↳ randomized complete block design.

Sub plot analysis.

		dF	SS	MS	F
subplot		$(K-1)$	SS_γ		MS_γ / MSE
sub x main plot		$(J-1)(K-1)$	$SS_{\beta\gamma}$		$MS_{\beta\gamma} / MSE$
Residual	E	$I(J-1)(K-1)$	SS_E		
Total		$IJK-1$	SS_T		

↳ Contrasts : • si on veut comparer 2 niveaux du main factor $\beta_j - \beta_{j'} \rightarrow (Y_{\bullet j \bullet} - Y_{\bullet j' \bullet})$.

↳ On utilise $\hat{\sigma}_w^2 \rightarrow MSE_F$

$$\begin{cases} \mathbb{V}\left(\hat{\beta}_j - \hat{\beta}_{j'}\right) =? \dfrac{2\, SS_F}{IK} \\[2ex] \mathbb{V}\left(\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{k'}\right) =? \dfrac{2\, SSE}{IJ} \end{cases}$$