Biologie et Modélisation

Bases mathématiques pour la modélisation

M. Bailly-Bechet, très largement inspiré de S. Mousset

Université Claude Bernard Lyon I – France

Document disponible à :
`http://pbil.univ-lyon1.fr/members/mbailly`

La modélisation en biologie.

Sujets abordés durant le cours

- Modèles continus
- Modèles discrets
- Modèles stochastiques

Les outils mathématiques à connaître.

Table des matières

Qu'est-ce qu'un modèle ?

- Une représentation de certains aspects d'un objet ou d'un phénomène du monde réel.
- Utilisant un système symbolique :
  - équation mathématique
  - système informatique (langage de programmation, base de données...)
  - représentation géométrique (courbes, surfaces, cartes...)
- Interprétable en termes biologiques par exemple.

Comment élaborer un modèle ?

La modélisation est la démarche qui permet l'élaboration d'un modèle. Cette étape prend en compte :

- L'objet et/ou le phénomène à représenter.
- Le système formel choisi.
- Les objectifs du modèle.
- Les données (relatives aux variables) et connaissances (relations entre les variables) disponibles ou accessibles par l'expérience ou par l'observation.

Cela passe généralement par une étape de simplification.

Le travail du modélisateur

Le travail du modélisateur dépend de la situation biologique et du système formel choisi. Les tâches à effectuer sont généralement :

- Formalise le problème ≈ écrire le modèle.
- Manipuler le modèle pour le rendre plus utilisable et étudier ses propriétés.
- Établir des relations avec d'autres représentations (graphes, programmes informatiques. . .).
- Interpréter le modèle et confronter les résultats du système formel avec des données réelles (issues de l'expérimentation).

Table des matières

Modèles continus : EDO dans $\mathbb{R}$

Pour ce cours nous nous intéresserons à la modélisation de systèmes dynamiques à l'aide d'équations différentielles ordinaires :

- Outil mathématique simple.
- Permettant d'appréhender des phénomènes variés.
- Analyse et interprétation des résultats aisées.

Le plus souvent, nous essaierons d'illustrer le cours à l'aide d'exemples biologiques et/ou concrets.

Modèles discrets

Dans une deuxième partie du cours nous nous intéresserons aux modèles discrets.

- Lien EDO / suites (modèles continus / modèles discrets)
- Modèles de Leslie.
- Chaînes de Markov.

Modèles stochastiques

La dernière partie du cours s'intéressera à des modèles stochastiques.

- Intervention du hasard.
- Prédictions en termes de probabilité.
- Simulations.

Table des matières

Les notions de dérivée et de différentielle

Définition

Si g est une fonction de x, on appelle “différentielle de g” la quantité

$$dg = \frac{dg}{dx} dx.$$

Exemple

$$g(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad dg = \frac{1}{x} dx$$

La quantité dg représente la variation de g relative à une variation de x, dx (différentielle de x).

La résolution des EDO simples

La résolution des EDO linéaires d'ordre 1 est censée être connue.
Adresse utile : `http://spiral.univ-lyon1.fr/mathsv/`

Un rappel peut-être ?

La notion de voisinage

Lors de l'analyse qualitative des EDO, nous nous placerons souvent au "voisinage" d'un point particulier. Dans $\mathbb{R}$, un voisinage $\mathcal{V}_{x_0}$ d'un point x_0 doit avoir les propriétés suivantes :

- $\mathcal{V}_{x_0}$ est un intervalle continu
- $x_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$
- $\exists \epsilon \in \mathbb{R}^{+*} \quad | \quad]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[\quad \subset \quad \mathcal{V}_{x_0}$.

On considèrera très souvent un voisinage de x_0 pour lequel ϵ est très petit.

Les développements limités d'ordre n

Un développement limité d'ordre n au voisinage du point a se déduit de la formule de Taylor, qui lie une fonction et ses dérivées.

$$f(a+x) = f(a) + xf'(a) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a) + o(x^n)$$

Le plus souvent, nous nous limiterons au développement limité d'ordre 1, c'est à dire de la tangente à la courbe représentative de f au point $x = a$. C'est ce que nous appellerons "la linéarisation".

Un peu d'algèbre linéaire

Dans la partie du cours consacré aux systèmes discrets

- Calcul matriciel simple
- Valeurs propres / Vecteurs propres d'une matrice

Notions de probabilités

Dans la partie du cours consacré aux modèles discrets et aux modèles stochastiques

- Probabilités
- Probabilités conditionnelles
- Variables aléatoires