Biostatistiques MIV
TD 1 : Développements limités, indépendance, espérance et moments

M. Bailly-Bechet

Printemps 2011

1 Développements limités

On rappelle que $\frac{d\cos(x)}{dx} = -\sin(x)$ et $\frac{d\sin(x)}{dx} = \cos(x)$.

1. Écrivez le développement limité à l'ordre 6 de $\sin(x)$ en 0.
2. Faîtes de même pour $\cos 3(x)$.
3. Pouvez vous généraliser les deux formules précédentes sans calcul ?
4. Comparez les deux formules précédentes au DL de $\exp(x)$.
5. Retrouvez par cette méthode la formule $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.

2 Indépendance

Question préparatoire X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, suivant respectivement des lois de probabilités $p(X = x)$ et $q(Y = y)$. Rappelez la définition de l'espérance $\mathbb{E}(X)$.

Démontrez que :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \tag{1}$$

Question d'examen Biostatistiques MIV 2009 Soient deux variables aléatoires discrètes *non indépendantes*, X et Y. La valeur de Y est dépendante de celle de X ; en effet on a :

$$X = 0 \qquad p(X = 0) = \tfrac{1}{2} \tag{2}$$

$$X = 1 \qquad p(X = 1) = \tfrac{1}{2} \tag{3}$$

$$Y = -1 \quad \begin{cases} p(Y = -1|X = 0) = \frac{2}{3} \\ p(Y = -1|X = 1) = \frac{1}{3} \end{cases} \tag{4}$$

$$Y = 1 \quad \begin{cases} p(Y = 1|X = 0) = \frac{1}{3} \\ p(Y = 1|X = 1) = \frac{2}{3} \end{cases} \tag{5}$$

On rappelle la formule de l'espérance d'une variable aléatoire Y conditionnée à une autre v.a. X :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{X=x} p(x) \left(\sum_{Y=y} yp(y|x) \right) \tag{6}$$

1. Démontrer que $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{E}(Y) = 0$.
2. Écrivez la table des valeurs de la v.a. $X + Y$, c'est à dire l'ensemble de toutes les valeurs possibles de $X + Y$ et la probabilité associée.
3. Calculer $\mathbb{E}(X+Y)$. À-t-on l'égalité $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$? Celle-ci serait-elle vraie si les variables X et Y étaient indépendantes ?
4. De la même façon, calculer $\mathbb{E}(XY)$. À-t-on l'égalité $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$?

3 Moments et espérance

3.1 Un exercice sans rapport avec les rayons Γ (Examen Biostatistiques-MIV 2010)

La fonction Γ (prononcer gamma) est une fonction définie par une intégrale, comme suit :

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \lambda^k t^{k-1} dt. \tag{7}$$

Elle n'a pas de forme analytique simple. On la présente souvent comme une généralisation de la fonction factorielle à l'ensemble des réels.

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrez que $\Gamma(k + 1) = k\Gamma(k)$.

Il existe une loi de probabilité, dite loi gamma, qui est construite à partir de cette fonction. C'est une loi à deux paramètres (comme la loi normale), λ et k. Sa densité de probabilité est :

$$p_\Gamma(x|\lambda, k) = \frac{x^{k-1}\lambda^k e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)}. \tag{8}$$

On suppose que la variable aléatoire X est une v.a. continue qui suit une loi Γ de paramètres λ et k.

2. Vérifiez que la formule 8 correspond bien à celle d'une densité de probabilité.
3. Montrez que l'on peut écrire l'espérance de X comme $\mathbb{E}(X) = \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda\Gamma(k)}$. Déduisez-en l'espérance de X en fonction de k et λ.
4. Par le même raisonnement, calculez la variance $\mathbb{V}(X)$ en fonction de k et λ.

3.2 Mélange de lois exponentielles (Examen Biostatistiques-MIV 2010, 2$^{\text{ème}}$ session)

Soit X une variable aléatoire (v.a.) définie sur $[0, +\infty]$ suivant une loi exponentielle de paramètre a. Sa densité de probabilité est $p_a(X = x) = ae^{-ax}$, avec $a > 0$.

1. À l'aide de deux développements limités d'ordre 1, écrivez $p_a(0 + \epsilon)$, puis $p_{0+\epsilon}(x)$, avec $\epsilon \to 0$ dans les deux cas.
2. Montrez que la fonction génératrice des moments de X peut s'écrire $F(t) = \frac{1}{1-\frac{t}{a}}$, pour $t < a$. À partir de ce résultat, trouvez l'équivalence entre loi exponentielle et loi du χ^2 (*question non posée à l'examen*).
3. *À partir de cette formule*, redémontrez que l'espérance et la variance d'une loi exponentielle de paramètre a sont respectivement $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{a^2}$.

On considère maintenant une autre v.a. Y, qui suit une loi dite de mélange ; en effet la densité de probabilité de Y est la somme de deux densités exponentielles. On a :

$$p(Y = y) = \alpha a e^{-ay} + \beta b e^{-by} \tag{9}$$

4. Sous quelle condition cette loi est bien celle d'une densité de probabilité ?
5. Donnez une expression de l'espérance et de la variance de Y en fonction de a, b, α, β.

3.3 Loi du χ^2 – Examen Biostatistiques MIV 2009

On définit une v.a. du χ^2 à n degrés de liberté comme :

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2, \tag{10}$$

où chaque u_i est une v.a. normale centrée réduite (i.e suivant une loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1) indépendante des autres.

1. Soit X une variable aléatoire du χ^2 à n degrés de liberté et Y une variable aléatoire du χ^2 à p degrés de liberté. Ces deux variables sont indépendantes. Quelle loi suit la variable aléatoire $X+Y$? Démontrez votre réponse.
2. Démontrez que l'espérance d'une v.a. du χ^2 à 1 degré de liberté vaut 1 (on rappelle la formule de l'intégration par parties : $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$).
3. Que pouvez-vous en déduire sur l'espérance d'une v.a. du χ^2 à n degrés de liberté ? Il n'est pas nécessaire de démontrer ce résultat, une justification suffira.